Υπολογιστική Ανάλυση Φαινομένων Μεταφοράς

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Υπολογιστικό Θέμα COMSOL

Ημερ/νία Παράδοσης: 21/06/2021

Συναγωγή Rayleigh-Benard

Ένα στρώμα ρευστού βρίσκεται ανάμεσα σε δύο οριζόντιες πλάκες, οι οποίες διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία και η μεταξύ τους απόσταση είναι h, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Η θερμοκρασία της κάτω πλάκας είναι μεγαλύτερη κατά, δT, σε σχέση με την πάνω πλάκα. Για την επίλυση του προβλήματος υϊοθετούμε την προσέγγιση Boussinesq (οι διακυμάνσεις της πυκνότητας του ρευστού επηρεάζουν μόνο τη βαρυτική δύναμη) και καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\rho_o\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)=-\nabla P+\mu_o\nabla^2\vec{u}-\rho_o\beta(T-T_o)\vec{g} \quad (1.1)$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla T=\alpha\nabla^2 T \quad (1.3)$$

όπου T_o: η θερ/σία της πάνω (ψυχρής) πλάκας, ρ_o, μ_o η πυκνότητα και το δυναμικό ιξώδες του ρευστού στη θερ/σία T_o, $\vec{u}$: το πεδίο ταχύτητας του ρευστού, P: η πίεση, β: ο συντελεστής διαστολής του ρευστού, $\vec{g}$: η επιτάχυνση της βαρύτητας και α: ο συντελεστής θερμικής διαχυτότητας του ρευστού.

Στη συνέχεια αδιαστατοποιούμε τις εξισώσεις (1.1)-(1.3) με βάση τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x'=\frac{x}{h}, y'=\frac{y}{h}, \tau=\frac{t}{\frac{h^2}{\alpha}}, \theta=\frac{T-T_o}{\delta T}, u'=\frac{u}{\alpha/h}, v'=\frac{v}{\alpha/h}, P'=P/(\frac{\rho_o\alpha^2}{h^2}) \quad (1.4)$$

όπου x', y' οι αδιάστατες διαστάσεις χώρου κατά τη x και y διεύθυνση, αντίστοιχα, τ: ο αδιάστατος χρόνος, θ: η αδιάστατη θερμοκρασία, u', v' οι αδιάστατες συνιστώσεις της ταχύτητας κατά τη x και y διεύθυνση, αντίστοιχα, και P': η αδιάστατη πίεση. Με βάση τις σχέσεις (1.4) και αντικαθιστώντας στις (1.1)-(1.3) καταλήγουμε στο ακόλουθο αδιαστατοποιημένο σύστημα:

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial \tau}+\vec{u}'\cdot\nabla_{\vec{x}'}\vec{u}'=-\nabla_{\vec{x}'}P'+Pr\nabla^2_{\vec{x}'}\vec{u}'+Pr\cdot Ra\theta\vec{e}_y \quad (1.5)$$

$$\nabla_{\vec{x}'}\cdot\vec{u}'=0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vec{u}' \cdot \nabla_{\vec{x}'}\theta = \nabla^2_{\vec{x}'}\theta \tag{1.7}$$

όπου $\nabla_{\vec{x}'}$ ο τελεστής κλίσης στο αδιαστατοποιημένο σύστημα συντεταγμένων x', y', $\vec{e}_y$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατακόρυφη-y' διεύθυνση, $Pr = \frac{\mu_o/\rho_o}{\alpha}$ ο αδιάστατος αριθμός Prandtl (εκφράζει το λόγο διάχυσης ορμής προς τη διάχυση θερμότητας) και $Ra = \frac{\rho_o \beta g \delta T h^3}{\mu_o \alpha}$ ο αδιάστατος αριθμός Rayleigh (εκφράζει το λόγο της κλίμακας χρόνου για μεταφορά θερμότητας με διάχυση προς την κλίμακα χρόνου για μεταφορά θερμότητας με συναγωγή).

Δίνεται: Το μήκος των πλακών είναι, $L = 2.013h$, και στα πλευρικά (κατακόρυφα) σύνορα εφαρμόζονται περιοδικές συνοριακές συνθήκες για την ταχύτητα και για τη θερμοκρασία.

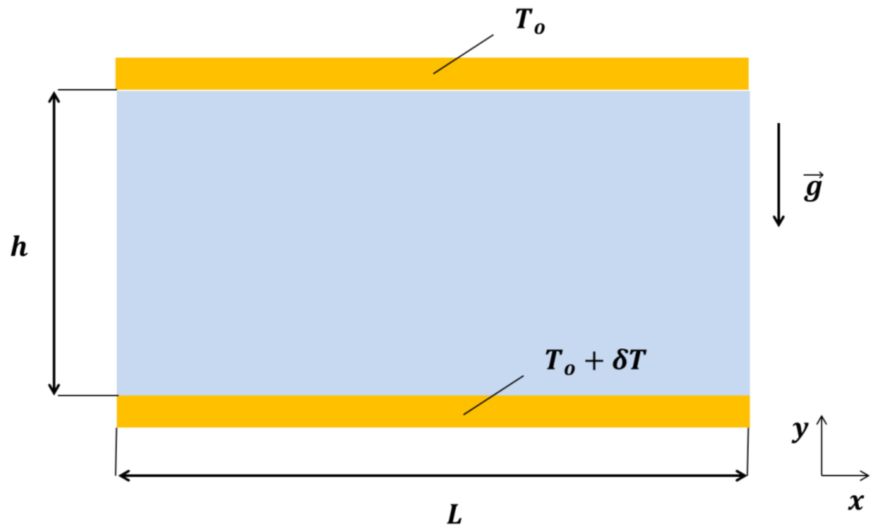
Ζητούνται:

(α) Ποιά είναι η κατανομή της (αδιάστατης) θερμοκρασίας και του (αδιάστατου) πεδίου ταχυτήτων (μέτρο ταχύτητας) σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης όταν $Pr = 1$ και $Ra = 1700$; Απεικονίστε τις ροϊκές γραμμές και το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας.

(β) Πραγματοποιήστε παραμετρική ανάλυση ως προς τον αριθμό Rayleigh για το διάστημα τιμών [1700,1720] και απεικονίστε τη μεταβολή του μέγιστου μέτρου της ταχύτητας. Τι παρατηρείτε;

(γ) Επιλύστε το πρόβλημα σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης για $Pr = 1$ και $Ra = 1720$. Στη συνέχεια μειώστε την τιμή του αριθμού Rayleigh κατά 10^{-1} και υπολογίστε τη χρονική εξέλιξη του μέγιστου μέτρου της ταχύτητας χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη τη λύση μόνιμης κατάστασης που υπολογίσατε για $Ra = 1720$. Απεικονίστε την κατανομή της θερμοκρασίας και του μέτρου της ταχύτητας όταν η λύση προσεγγίσει συνθήκες μόνιμης κατάστασης. Σχολιάστε τα αποτελέσματα συγκρίνοντας με την αντίστοιχη λύση μόνιμης κατάστασης για $Ra = 1720$.

(δ) Χρησιμοποιήστε ως αρχική συνθήκη τη λύση που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα (για $Ra = 1719.9$) και πραγματοποιήστε παραμετρική ανάλυση ως προς τον αριθμό Rayleigh πάλι για το διάστημα τιμών [1700,1720]. Απεικονίστε τη μεταβολή του μέγιστου μέτρου της ταχύτητας και συγκρίνετε με το αποτέλεσμα της παραμετρικής ανάλυσης του δεύτερου ερωτήματος. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.



Σχήμα 1. Γεωμετρία κελιού Rayleigh-Benard. Με πορτοκαλί χρώμα απεικονίζονται τα στερεά τοιχώματα σταθερής θερμοκρασίας (T_o: πάνω πλάκα, $T_o + \delta T$: κάτω πλάκα). Με γαλάζιο χρώμα απεικονίζεται ο χώρος που καταλαμβάνεται από το ρευστό.