Προχωρημένη Ρευστομηχανική

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Υπολογιστικό Θέμα

Ημερ/νία Παράδοσης: 08/01/2021

Α. Τριχοειδής Ανύψωση

Θεωρήστε τη διεπιφάνεια αέρα-υγρού κοντά σε μια κάθετη επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Το υγρό διαβρέχει την επιφάνεια σχηματίζοντας μια γωνία θ, η οποία ονομάζεται γωνία επαφής. Το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας $y(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$P_1 - P_2 = -2\mathcal{H}\gamma = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\gamma, \qquad (A.1)$$

όπου P_1, P_2: η πίεση του υγρού και του αέρα, αντίστοιχα, $\mathcal{H}$: η μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας και γ: η επιφανειακή τάση. Η πίεση στην αέρια φάση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, $P_2 = P_o$ και η στατική πίεση στην υγρή φάση υπολογίζεται από τη σχέση: $P_1 = P_o - \rho_L g y$, όπου ρ_L η πυκνότητα της υγρής φάσης και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Συνεπώς η πίεση της άεριας φάσης και της υγρής φάσης είναι ίσες όταν $y = 0$ και η διεπιφάνεια εκεί γίνεται οριζόντια. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πιέσεων στη σχέση (Α.1) καταλήγουμε στην:

$$\frac{\rho_L g}{\gamma}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} y = \frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (A.2)$$

Το χαρακτηριστικό μήκος για το πρόβλημα αυτό, $\lambda \equiv \left(\frac{\gamma}{\rho_L g}\right)^{1/2}$ ονομάζεται τριχοειδές μήκος, και χρησιμοποιείται για την αδιαστατοποίηση του ύψους, y και της οριζόντιας συνιστώσας, x της ελεύθερης επιφάνειας. Αν ορίσουμε τις αδιάστατες μεταβλητές: $\hat{y} \equiv \frac{y}{\lambda}$ και $\hat{x} \equiv \frac{x}{\lambda}$ τότε η (Α.2) καταλήγει στην:

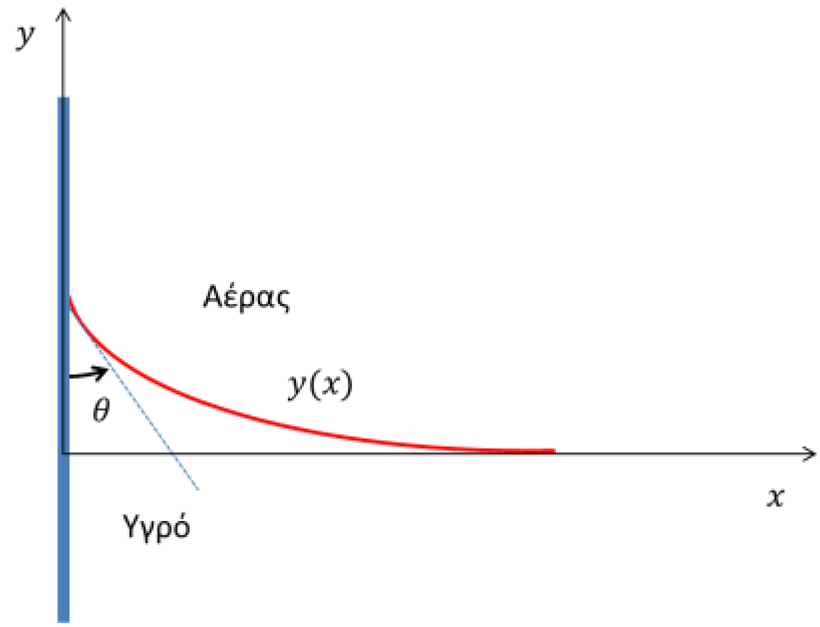
$$\left[1 + \left(\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \hat{y} = \frac{d^2\hat{y}}{d\hat{x}^2}. \qquad (A.3)$$

(α) Θεωρήστε ότι σε αδιάστατη απόσταση $\hat{x} = 8$ από την κάθετη επιφάνεια το ύψος της διεπιφάνειας υγρού/αερίου είναι $y = 0$. Βρείτε την κατάλληλη έκφραση για τη συνοριακή συνθήκη που εφαρμόζεται στην κάθετη επιφάνεια και επιλύστε αριθμητικά τη μη γραμμική, αδιαστατοποιημένη εξίσωση (Α.3) με τη μέθοδο Newton-Raphson. Η διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων να πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

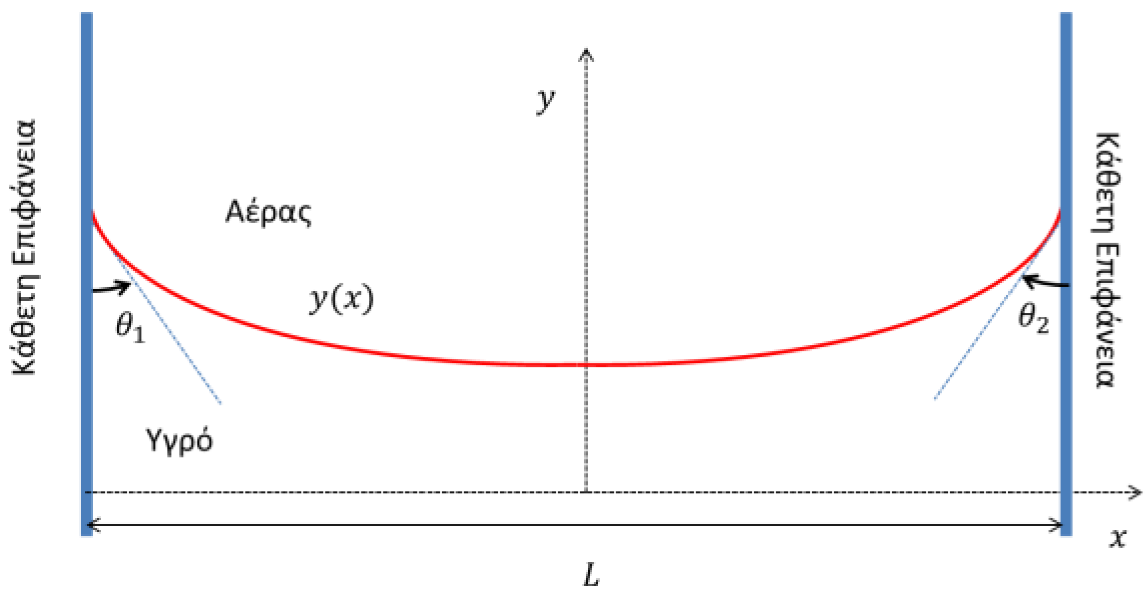
Υπολογίστε και απεικονίστε γραφικά το ύψος της διεπιφάνειας $y(x)$ όταν η γωνία επαφής είναι: 1) θ=70° (υδρόφιλη επιφάνεια) και 2) θ=120° (υδρόφοβη επιφάνεια). Να πραγματοποιηθεί ανάλυση ευαισθησίας ως προς τον αριθμό των κόμβων διακριτοποίησης.

(β) Θεωρήστε την περίπτωση που το υγρό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο κάθετες επιφάνειες όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 με την αδιάστατη απόσταση μεταξύ τους να είναι L=4. Επαναλάβετε τους υπολογισμούς του ερωτήματος (α) για τις ακόλουθες περιπτώσεις: i) θ_1= θ_2=70°, ii) θ_1= θ_2=120° iii) θ_1= 70°, θ_2=120°.

(γ) Επιλύστε αναλυτικά την εξίσωση (Α.3) θεωρώντας ότι το μέτρο της κλίσης της διεπιφάνειας είναι πολύ μικρό, δηλαδή: $\left(\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}\right)^2 \ll 1$. Εφαρμόστε τις συνοριακές συνθήκες για την περίπτωση που εξετάζεται στο ερώτημα (β) και συγκρίνετε την αναλυτική λύση με την αριθμητική λύση του προβλήματος όταν η απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών είναι L=2 και: i) θ_1= θ_2=85°, ii) θ_1= θ_2=95°, iii) θ_1=95°, θ_2=85°, iv) θ_1=120°, θ_2=70°.



Σχήμα 1. Διεπιφάνεια υγρού αέρα κοντά σε κάθετη επιφάνεια.



Σχήμα 2. Διεπιφάνεια υγρού αέρα μεταξύ δύο κάθετων.

B. Λύση Blasius για Στρωτό Οριακό Στρώμα

Επιλύστε αριθμητικά την παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση (λύση Blasius για στρωτό οριακό στρώμα):

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \tag{B.1}$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$f(0) = 0, \left.\frac{df}{\delta\eta}\right|_{\eta=0} = 0, \left.\frac{df}{\delta\eta}\right|_{\eta=10} = 1. \tag{B.2}$$

Συγκρίνετε την κατανομή $\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{df}{d\eta}$ με αυτήν που προτείνει ο Prandtl.