Προχωρημένη Ρευστομηχανική

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

$2^{η}$ Σειρά Εργασιών

Ημερ/νία Παράδοσης: 7/12/2020

Προβλημα 1.

(α) Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{1}{2}\rho \frac{D\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{Dt} \quad (1)$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v} \quad (2)$$

(β) Για ένα ιδανικό και ασυμπίεστο ρευστό αποδείξτε ότι:

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v} = 0 \quad (3)$$

ρ: η πυκνότητα, $\boldsymbol{v}$: το πεδίο ταχύτητας, και $\boldsymbol{\sigma}$**:** συμμετρικός τανυστής τάσεων.

Πρόβλημα 2.

Σε μία τριδιάστατη ροή σε ένα σημείο P καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων δίνεται ο τανυστής τάσεων:

$$\boldsymbol{\sigma} = 5\boldsymbol{ii} - 6\boldsymbol{jj} - 12\boldsymbol{jk} - 12\boldsymbol{kj} + \boldsymbol{kk}$$

(α) Βρείτε τις διευθύνσεις των επιπέδων (που διέρχονται από το P), στα οποία το διάνυσμα των τάσεων είναι κάθετο. Οι διευθύνσεις των επιπέδων αυτών λέγονται κύριες (principal directions) και οι κάθετες σε αυτά τάσεις ονομάζονται κύριες τάσεις (principal stresses).

(β) Βρείτε τον τανυστή τάσεων σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμενων οι άξονες του οποίου είναι παράλληλες προς τα μοναδιαία διανύσματα των κύριων διευθύνσεων.

(γ) Αποδείξτε ότι η μέγιστη και η ελάχιστη κάθετη τάση πάνω σε οποιαδήποτε επιφάνεια που διέρχεται από το P είναι ίση με τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των κύριων τάσεων, αντίστοιχα.

Πρόβλημα 3.

Δείξτε ότι ο στροβιλισμός, $\boldsymbol{w} = \nabla \times \boldsymbol{v}$, σε ένα ασυμπίεστο Νευτωνικό ρευστό ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} = \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{w} \tag{4}$$

όπου ν το κινηματικό ιξώδες, και $\boldsymbol{v}$ το διάνυσμα της ταχύτητας.

<u>Χρήσιμες ταυτότητες:</u>

$$\boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{a} = \nabla \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \right) - \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \tag{5}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) \tag{6}$$