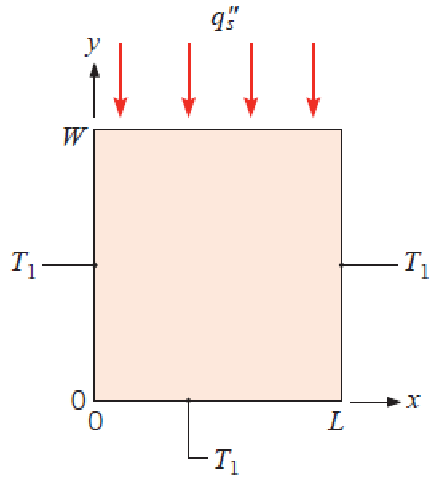
ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μια διδιάστατη επιφάνεια στην οποία η θερμότητα μεταφέρεται με αγωγή υπόκειται σε συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet σε 3 πλευρές (όπως φαίνεται στο Σχήμα) και σε ομοιόμορφη εισερχόμενη θερμορροή q_s'' στην πάνω πλευρά. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών για να υπολογίσετε τη θερμοκρασιακή κατανομή στην επιφάνεια.



Η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας, σε ΜΚ, χωρίς παραγωγή θερμικής ενέργειας και σταθερές ιδιότητες είναι:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \theta \equiv T - T_1$$

με συνοριακές:

$$\theta(0, y) = \theta(L, y) = \theta(x, 0) = 0, \qquad k \left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s''$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών θεωρούμε ότι η ζητούμενη συνάρτηση είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων: μιας που εξαρτάται αποκλειστικά από το x και μιας που εξαρτάται αποκλειστικά από το y: $\theta(x, y) = X(x)Y(y)$

Αντικαθιστώντας στην:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \rightarrow Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \rightarrow$$

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση αποκλειστικά του x, και το δεξί αποκλειστικά του y, επομένως για να είναι ίσα θα πρέπει:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = A$$

Θα μπορούσε η σταθερά, A, να είναι μια αρνητική ή μηδενική ποσότητα;

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Αν ήταν μηδενική τότε:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} X = c_1x + c_2 \\ Y = c_3x + c_4 \end{aligned}$$

Από συνοριακές:

$$\theta(0, y) = 0 \rightarrow c_2Y(y) = 0$$
$$\theta(L, y) = 0 \rightarrow (c_1L + c_2)Y(y) = 0$$

Αν $Y(y) = 0 \rightarrow \theta(x, y) = 0$ που παραβιάζει τη συνοριακή: $k\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s''$

Αν $Y(y) \neq 0 \rightarrow c_2 = c_1 = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow \theta(x, y) = 0$ που παραβιάζει τη συνοριακή: $k\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s''$

Συνεπώς $A \neq 0$

- Αν ήταν αρνητική $A = -\lambda^2$ τότε:

$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 \rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0$ με γενική λύση την: $X = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$

Στην περίπτωση αυτή: $\theta(0, y) = \theta(L, y) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0$ και $c_1 e^{\lambda L} + c_2 e^{-\lambda L} = 0$ από την οποία προκύπτει: $c_1 = -c_2 = 0 \rightarrow X(x) = 0$ που παραβιάζει τη συνοριακή: $k\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s''$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Επομένως $A = \lambda^2$ είναι θετική:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$
$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$$

με γενικές λύσεις τις:

$$X = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$
$$Y = c_3 \exp(\lambda y) + c_4 \exp(-\lambda y)$$

- Από τη συνοριακή: $\theta(0, y) = 0 \rightarrow c_1 Y(y) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

- Από τη συνοριακή: $\theta(x, 0) = 0 \rightarrow c_2 \sin(\lambda x)\,(c_3 + c_4) = 0 \rightarrow c_3 + c_4 = 0$

Η $X(x) = c_2 \sin(\lambda x)$ δεν μπορεί να είναι μηδενική, γιατι διαφορετικά παραβιάζεται η

$$k \left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s''$$

- Από τη συνοριακή : $\theta(L, y) = 0 \rightarrow c_2 \sin(\lambda L)\, c_3(\exp(\lambda y) - \exp(-\lambda y)) = 0 \rightarrow$

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1,2,3, \dots$$

Για $n = 0$ παίρνουμε τη λύση: $X(x) = 0$ που παραβιάζει τη $k \left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s''$

Επομένως η λύση είναι η:

$$\theta = c_2 c_3 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\exp\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi y}{L}\right)\right)$$
$$= c_n' \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\exp\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi y}{L}\right)\right), n = 1,2,3, \ldots$$

Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό μια πιο γενική λύση λαμβάνεται από την υπέρθεση όλως των λύσεων:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n' \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\exp\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi y}{L}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Εφαρμόζουμε τη συνοριακή σταθερής εισερχόμενης θερμορροής στο πάνω σύνορο:

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=W} = k\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=W} = q_s'' \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cosh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) = \frac{L}{k\pi} q_s''$$

Οι συναρτήσεις $\sin(\frac{n\pi x}{L})$ είναι ορθογώνιες, δηλαδή στο πεδίο ορισμού $[0, L]$ ισχύει:

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, m \neq n$$

Hint: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

$$\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi x}{L})\, dx = \frac{L}{2}$$

Hint: $\sin{}^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

Επομένως, για τον υπολογισμό του c_n:

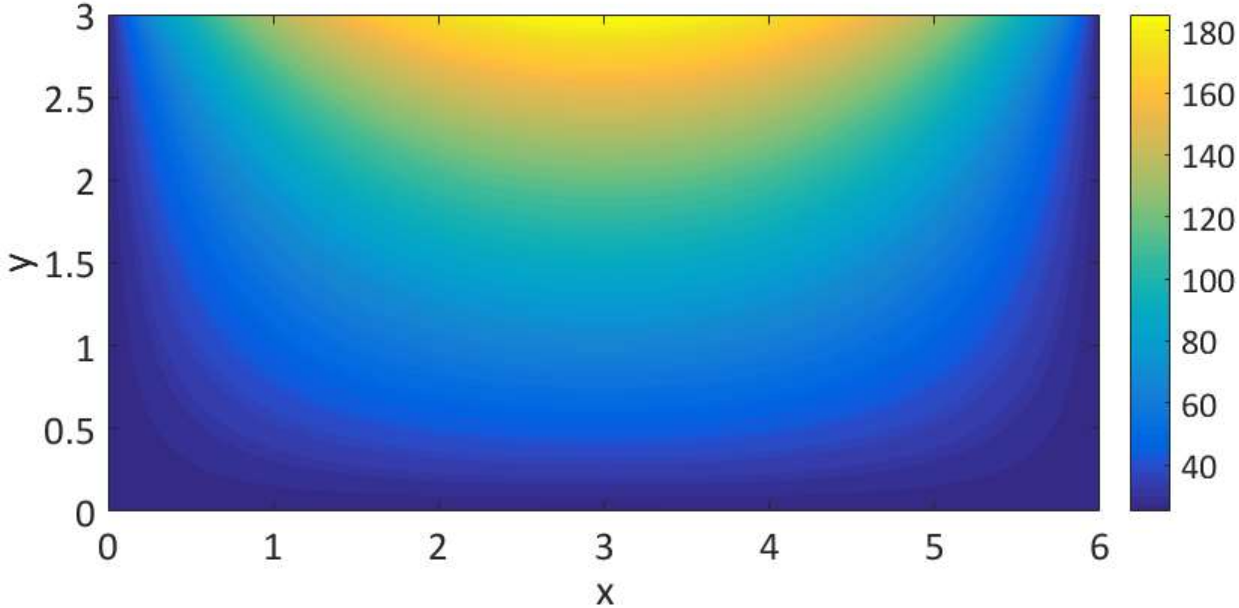
$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) = \frac{L}{k\pi} q_s'' \rightarrow$$

$$nc_n \cosh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) = \frac{L}{k\pi} q_s'' \frac{\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_o^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} = \frac{L}{k\pi} q_s'' \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^{n+1}) \rightarrow$$

$$c_n = \frac{L}{k\pi} q_s'' \frac{2}{n^2\pi}(1 + (-1)^{n+1}) \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)}$$

Συνεπώς:

$$T - T_1 = \theta = \frac{2Lq_s''}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{n+1})}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)}$$



$$L = 6\,m, W = 3\,m, k = 0.25\,\frac{W}{mK}, q_s'' = 20\,\frac{W}{m^2}\;T_1 = 25^oC$$